



А. КОЛМОГОРОВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1966

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

А. Колмогоров

При изучении математического анализа перед учащимися математических школ возникает дилемма: обращаться к большим учебникам университетского типа, или к упрощенным учебникам для техникумов и технических вузов с небольшой программой математики. Первые очень объемисты, а вторые не удовлетворяют понятному стремлению учащихся математических школ к современному "строгому" и достаточно общему изложению основ анализа.

Публикуемое небольшое пособие имеет своей целью помочь тем учащимся, которые желают хотя бы в предварительном порядке познакомиться с "университетским" стилем отношения к началам анализа. Оно, конечно, не может заменить настоящий полный учебник.

В пособии приведены задачи самой разной трудности. Число их ограничено и выбор довольно случаен, они не претендуют на большее, чем на указание характера задач, которые мне кажутся желательными при прохождении изложенных в пособии тем. В реальном школьном преподавании их должно быть значительно больше.

ГЛАВА I
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ
ЧИСЛА

§ I. Арифметика целых неотрицательных чисел /повторение/.

Обозначения $a \in M$, $b \in M$

a принадлежит множеству M , b не принадлежит M .

1. Бесконечное множество целых неотрицательных чисел

$$N = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Множество натуральных чисел $N^+ = \{1, 2, \dots\}$

2. Сложение $c = a + b$

- операция всегда выполняемая в пределах N

3. $a < b$ в том и только в том случае, когда существует $x \in N^+$, для которого $a + x = b$.

4. $c = a - b$, если $b + c = a$. Вычитание - однозначная операция, выполняемая в пределах N в том и только в том случае, когда $b \leq a$.

5. Умножение

$$c = ab$$

- операция, всегда выполняемая в пределах N

7. Деление с остатком. Если $a \in N$, $b \in N^+$, то однозначно определены $q \in N$ и $r \in N$, для которых

$$a = bq + r, \quad r < b.$$

При этом $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ называется "целой частью частного $\frac{a}{b}$ ",

r - остаток при делении a на b .

Если $r = 0$, то говорят, что a делится на b ,

или a есть кратное числа b , или b есть делитель числа a

8. Десятичная система счисления.

Для любого $a \in \mathbb{N}^+$ последовательным делением на десять получаем: $a = 10a_0 + b_0$, $b_0 < 10$

$$a_0 = 10a_1 + b_1, a = 10^2a_1 + 10b_1 + b_0, b_1 < 10,$$

$$a_1 = 10a_2 + b_2, a = 10^3a_2 + 10^2b_2 + 10b_1 + b_0, b_2 < 10,$$

Процесс этот заканчивается, когда /на каком-то шагу с номером n / получим

$$a_n = 0$$

Таким образом, любое число $a \in \mathbb{N}^+$ представляется в виде

$$a = 10^n b_n + 10^{n-1} b_{n-1} + \dots + 10b_1 + b_0,$$

где

$$0 < b_n < 10, 0 \leq b_k < 10 \quad \text{при } k < n$$

Число a записывается в виде

$$a = b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

§ 2. Двоичная система счисления и система счисления с произвольным основанием.

Легко понять, что в § I.8 вместо числа 10 можно было взять любое целое $\omega > 1$. Например, в результате последовательного деления на 2

39	I	/в правой колонке записаны остатки/
19	I	
9	I	
4	0	
2	0	
1	I	

получаем

$$39 = 2^5 + 2^2 + 2 + 1,$$

т.е. в двоичной системе счисления

$$39 = \overline{10011}$$

/на некоторое время двоичную запись для отличия от десятичной отмечаем чертой сверху/.

Пример перехода от двоичной записи к десятичной:

$$\overline{10101001} = 1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 1 + 8 + 32 + 128 = 169.$$

Следует научиться выполнять четыре арифметических действия в двоичной и любой другой системе счисления. В двоичной системе очень просто выполняется и вычисление квадратных корней.

ПРИМЕР: $\sqrt{\overline{10101001}} = \overline{1101} = 13$

$$\begin{array}{r} \overline{1} \\ -1 \\ \hline 110 \\ -101 \\ \hline 11001 \\ -11001 \\ \hline \end{array}$$

§ 3. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель.

В этом параграфе мы будем иметь дело только с натуральными числами. Лишь для остатков при делении в ходе доказательства будет допускаться значение 0.

Наименьшим кратным двух натуральных чисел a и b называется наименьшее из натуральных чисел, делящихся как на a , так и на b . Оно обозначается

$$m = [a, b]$$

так как одним из общих кратных чисел a и b является их произведение ab и каждое общее кратное чисел a и b должно делиться на a , то для нахождения m достаточно проверить делимость на b чисел $a, 2a, 3a, \dots, ba$.

ТЕОРЕМА I. Любое общее кратное M чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное m .

В самом деле, M можно представить в виде

$$M = qm + r$$

Остаток r делится как на a , так и на b . Но, так как этот остаток меньше m , то он может быть только нулем.

Любые два натуральных числа имеют общий делитель 1. Так как каждый их общий делитель не превосходит каждого из них, то существует их наибольший общий делитель

$$d = (a, b)$$

ТЕОРЕМА 2. Всегда

$$md = ab,$$

т.е.

$$(a, b) = \frac{ab}{[a, b]}$$

Любой общий делитель $\mathcal{D}$ чисел a и b является делителем их наибольшего общего делителя d .

Доказательство. Так как произведение ab есть общее кратное чисел a и b , то в силу теоремы I оно делится на m . Целое число

$$d = \frac{ab}{m}$$

является делителем a и b , так как

$$\frac{a}{d} = \frac{m}{b}, \quad \frac{b}{d} = \frac{m}{a}$$

где $\frac{m}{b}$ и $\frac{m}{a}$ числа целые.

С другой стороны, если $\mathcal{D}$ есть какой-либо общий делитель a и b , то

$$M = \frac{ab}{\mathcal{D}}$$

будет общим кратным a и b и в силу теоремы I имеет вид

$$M = km$$

Поэтому

$$d = \frac{ab}{m} = \frac{kab}{M} = k\mathcal{D}$$

т.е. d делится на $\mathcal{D}$.

Числа a и b называются взаимно простыми, если

$$(a, b) = 1$$

В силу теоремы 2 числа a и b взаимно просты в том и только в том случае, когда $[a, b] = ab$.

ТЕОРЕМА 3. Если делитель x произведения ab взаимно прост с a , то он является делителем другого множителя b .

Доказательство. Если x взаимно просто с a , то

$$[x, a] = xa.$$

По теореме I число ab , являющееся общим кратным x и a , должно делиться на xa , а следовательно b делится на x .

Для нахождения общего наибольшего делителя служит алгоритм Эвклида, с которым мы еще несколько раз встретимся. Если

$$a_1 \geq a_2$$

то для нахождения $d = (a_1, a_2)$ поступают так:

$$a_1 = q_2 a_2 + a_3, \quad a_3 < a_2,$$

$$a_2 = q_3 a_3 + a_4, \quad a_4 < a_3,$$

$$a_3 = q_4 a_4 + a_5, \quad a_5 < a_4,$$

$$a_{k-1} = q_k a_k + a_{k+1}, \quad a_{k+1} < a_k,$$

Так как

$$a_2 > a_3 > a_4 > \dots,$$

процесс должен кончиться на том, что при каком-либо шаге остаток будет равен нулю, т.е. получится

$$a_{n-1} = q_n a_n$$

Докажите, что

$$d' = a_n$$

и будет наибольшим общим делителем чисел a_1 и a_2 .

§ 4. Разложение на простые множители.

Натуральное число, большее, чем единица, называется простым, если оно не имеет других делителей кроме самого себя и единицы. Т.о. единица к простым числам не причисляется.

Первые десять простых чисел таковы:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Теорема. Каждое натуральное число $n > 1$ единственным образом представляется в виде произведения

$$n = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$$

где числа

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$$

простые.

Доказательство основано на лемме:

лемма. Если произведение ab делится на простое число p , то хотя один из множителей a и b делится на p .

Эта лемма является непосредственным следствием теоремы 3 из § 3. Только она и нужна нам сейчас из теории, развитой в § 3.

§ 5. Положительные скалярные величины.

Вам уже известно много примеров систем скалярных величин: длины отрезков, площади плоских фигур, объемы пространственных фигур, промежутки времени /минута, пять минут, сутки и т.п./, массы тел, скорости и т.д. Две величины одной и той же системы можно сложить и получить величину той же системы. Две величины,

принадлежащие одной и той же системе, можно сравнивать. Сравнение приводит к одному из трех результатов:

$$a < b, \text{ или } a = b, \text{ или } b < a$$

Сравнивать величины разных систем бессмысленно /не имеет смысла вопрос о том, что больше, минута или метр/.

В математике несколько идеализируют свойства реальных величин и считают, что система положительных скалярных величин

$$S = \{a, b, c, \dots\}$$

должна обладать такими свойствами:

1. Если $a \in S$ и $b \in S$, то имеет место одно и только одно из соотношений

$$a < b, a = b, b < a$$

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$

3. Для любых $a \in S$ и $b \in S$ определена величина

$$c = a + b$$

которая тоже принадлежит S

4. Всегда $a + b = b + a$

5. Всегда $a + (b + c) = (a + b) + c$

6. Всегда $a + b > a$

7. Если $a > b$, то существует одна и только одна величина $c = a - b$, для которой

$$b + c = a$$

8. Каковы бы ни были $a \in S$ и натуральное число n , существует величина $b \in S$, для которой

$$nb = a$$

9. Каковы бы ни были $a \in S$ и $b \in S$, существует такое натуральное число n , что

$$nb > a.$$

В свойствах 8 и 9 принято обозначение

$$nb = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ раз}}$$

Свойство 8 выражает неограниченную возможность деления на равные части. Вместо

$$nb = a$$

пишут

$$b = \frac{a}{n}.$$

Можно доказать, пользуясь свойствами I-7, однозначность деления /для данных a и n существует только одна величина b для которой $nb = a$ /. Мы однако не ставим перед собой задачи формального вывода из свойств I-9 всех обычных правил вычислений с величинами.

Свойство 9 называется аксиомой ЭВДОКСА, или АРХИМЕДА. Она существенна для построения теории измерения величин, геометрической теории пропорциональных отрезков и теории подобия геометрических фигур.

§ 7. Измерение величин /I/.

Выберем величину e в качестве единицы измерения.

В силу аксиомы Архимеда для любой другой величины a в ряду

$$e, 2e, 3e, \dots$$

найдется величина, превосходящая a . Обозначим через $q+1$ первое из натуральных чисел, для которого

$$(q+1)e > a$$

Тогда

$$q = \left[\frac{a}{e} \right]$$

называется целой частью отношения $\frac{a}{e}$. Очевидно, что всегда $\left[\frac{a}{e} \right]$ является неотрицательным целым числом /если $a < e$, то $q = 0$ /.

Будем последовательно делить единицу измерения пополам и т.д.:

$$e_0 = e, e_1 = \frac{e}{2}, e_2 = \frac{e_1}{2}, \dots, e_n = \frac{e_{n-1}}{2} = \frac{e}{2^n}, \dots$$

Процесс двоичного измерения величины a можно теперь изобразить формулами

$$a = qe + a_0 \quad (a_0 < e)$$

$$a_0 = q_1 e_1 + a_1 \quad (a_1 < e_1)$$

$$a_1 = q_2 e_2 + a_2 \quad (a_2 < e_2)$$

Неполные частные q_n могут принимать только два значения 0 и 1.

Очевидно, при любом n

$$a = qe + q_1 \frac{e}{2} + q_2 \frac{e}{2^2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n} + a_n, a_n < \frac{e}{2^n}$$

в некоторых случаях процесс двоичного измерения продолжается неограниченно, причем остатки a_n при любом n положительны. Например, для

$$a = \frac{e}{3}$$

получаем

$$a = \frac{e}{2^1} + \frac{e}{2^4} + \frac{e}{2^8} + \dots + \frac{e}{2^{1m}} + \frac{e}{3 \cdot 2^{1m}},$$

$$q, q_1, q_2, q_3, \dots = 0, 01010101 \dots$$

Если при каком-либо n получается точное равенство

$$a = qe + q_1 \frac{e}{2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n},$$

то будем считать, что все дальнейшие неполные частные q_m

и остатки a_n равны нулю. Такое соглашение позволяет считать, что при ~~двоичном~~ ^{двоичном} измерении всегда получается бесконечная последовательность чисел

$$q, q, q_2 \dots q_n \dots$$

Положим $x/$

$$A_n = qe + q, \frac{e}{2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n},$$

$$B_n = A_n + \frac{e}{2^n}$$

Легко проверить, что

$$qe = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots \leq q < \dots \leq B_n \leq \dots \leq B_2 \leq B_1 \leq B_0 = (q+1)e,$$

$$B_n - A_n < \frac{e}{2^n}$$

Эти неравенства позволяют доказать, что последовательность

$$q, q, q_2 \dots q_n \dots$$

/1/

однозначно определяет /при заданной единице измерения/ величину a . В самом деле, если бы последовательность /1/ получалась в процессе двоичного измерения двух различных величин a и $a' > a$, то при любом n выполнялось бы неравенство

$$a' - a \leq B_n - A_n = \frac{e}{2^n}$$

из которого вытекает неравенство

$$2^n (a' - a) \leq e$$

/2/

Но соблюдение неравенства /2/ при любом n противоречит аксиоме Архимеда.

$x/$ Покажите, что

$$a = m \frac{e}{2^n},$$

где

$$m = \left[\frac{2^n a}{e} \right] = q \cdot 2^n + q_1 \cdot 2^{n-1} + \dots + q_n.$$

Получаемая в результате двоичного измерения последовательность $/I/$ обладает такими свойствами:

/а/ q - целое неотрицательное, q_n - нуль, или единица;

/б/ хотя бы одно из чисел последовательности положительно;

/в/ среди чисел q_n бесконечное число нулей.

Естественно поставить вопрос, что получится, если взять произвольную последовательность чисел $/I/$, обладающую свойствами /а/, /б/, /в/. Не будет ли всегда такой последовательности соответствовать величина α , из которой заданная последовательность получается при двоичном измерении? Положительный ответ на этот вопрос получается, если потребовать, чтобы система величин S обладала еще одним свойством:

10. Аксиома существования верхней грани у ограниченной неубывающей последовательности. Если

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b,$$

то среди величин, не меньших любой величины a_n , существует наименьшая:

$$\alpha = \sup a_n$$

§ 8. Положительные действительные числа.

Результаты предшествующего параграфа могут быть изложены кратко так: выбрав единицу измерения ϵ при помощи процесса двоичного измерения, получаем взаимное соответствие между величинами системы S , обладающей свойствами I-10 и числовыми последовательностями со свойствами /а/ - /в/:

$$\alpha \longleftrightarrow q, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$$

Можно по определению считать, что последовательность

$$\alpha = q, q, q_2 \dots q_n \dots$$

есть число, величина же a получается в результате умножения единицы измерения e на число α :

$$a = \alpha e$$

Сравните такой подход с § 6 второй части алгебры Киселева, где говорится: "десятичные бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами". Существует еще много способов введения действительных чисел, которые связывают самое определение действительного числа с тем или иным способом записи /обозначения/ числа: по десятичной или двоичной системе счисления и т.п.

Можно, однако, избежать обращения в самом определении к специальному способу записи числа. К такому способу введения действительных чисел мы и переходим.

В формуле

$$a' = na$$

где n натуральное число, можно считать натуральное число n "оператором", который любой величине a системы S ставит в соответствие новую величину a' той же системы. Наши операторы обладают свойством аддитивности: при любых

a и b

$$n(a + b) = na + nb$$

Умножением на натуральные числа не исчерпываются аддитивные операторы над величинами. Таков же, например, оператор $\beta = \beta a = m \frac{a}{n}$ который можно обозначить

$$\beta = \frac{m}{n}$$

Если m не делится на n , то это дрoнное число.

ТЕОРЕМА. Любой аддитивный оператор в системе величин S , обладающий свойствами I-IO из §§ 6-7 представляется в виде

$$\beta = \beta a = \sup \beta_n,$$

где

$$\beta_n = q a + q, \frac{q}{2} + \dots + q_n \frac{a}{2^n}$$

и последовательность

$$q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

обладает свойствами $|a| - |b|$ из § 7.

Указание. Докажите сначала такую лемму: аддитивный оператор на системе положительных величин монотонен, т.е. для аддитивного γ из $\beta > a$ вытекает

$$\gamma \beta > \gamma a$$

После этого доказательство теоремы уже не трудно.

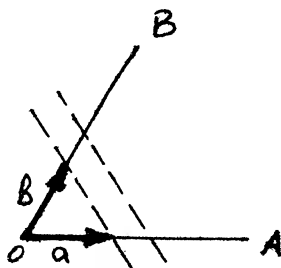
Теорема окончательно убеждает нас в разумности такого определения: положительное действительное число - это аддитивный оператор в системе положительных величин со свойствами I-IO.

Замечание. В случае длин отрезков длина

$$\beta = \beta a$$

получается из длины a таким построением:

На стороне OA $\angle AOB$ откладывается отрезок длины a с началом в вершине угла O . Через конец отрезка проводится прямая, параллельная направлению, характеризующему оператор β . Эта прямая на стороне OB отсекает отрезок длины β .



Теперь мы можем очень просто и естественно определить сложение и умножение положительных действительных чисел.

1. Оператор $\gamma = \alpha + \beta$ это оператор, преобразующий x в

$$\gamma x = \alpha x + \beta x .$$

2. Оператор $\gamma = \alpha \beta$ это оператор, преобразующий x в результат последовательного применения операторов β и α :

$$\gamma x = \alpha(\beta x) .$$

Сформулированная выше теорема допускает обращение: если последовательность

$$q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

обладает свойствами /а/ - /в/ из § 7, то оператор β , определяемый равенствами

$$\beta a = \sup b_n, \quad b_n = q a + q_1 \frac{a}{2} + \dots + q_n \frac{a}{2^n}$$

будет монотонным и аддитивным.

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между последовательностями со свойствами /а/ - /в/ и монотонными аддитивными операторами в системе положительных величин. Поэтому и получается, что для дальнейшего развития математической теории не имеет значения, ввели ли мы действительные числа как последовательности со свойства-

ми /а/ - /в/, или как операторы. От какой системы положительных величин со свойствами I-IO мы отправлялись, оказывается тоже не существенным, так как они все "изоморфны". С понятием "изоморфизма" более глубоко мы познакомимся позднее.

Замечание. Операторный подход к построению числовых систем получит далее интересное развитие. Действительные числа /здесь имеются в виду не только рассмотренные пока положительные числа, но и нуль и отрицательные числа/ могут рассматриваться как операторы, преобразующие вектор на плоскости $\bar{e}$ в вектор

$$\bar{e}' = a \bar{e}$$

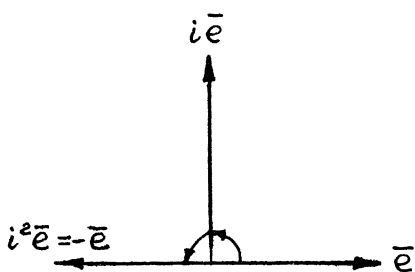
Введем новую операцию

$$\bar{e}' = i \bar{e}$$

поворота на прямой угол против часовой стрелки. Легко видеть, что

$$i^2 = -1$$

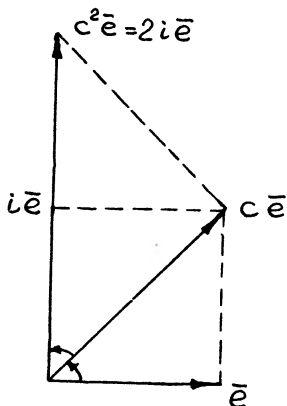
/см. чертёж/. Система операторов вида



$$a + bi$$

где a и b действительные числа, называется системой комплексных чисел.

Сложение и умножение комплексных чисел определяется так, как было сказано выше.



Например,

$$c = 1 + i$$

есть оператор поворота на 45° с последующим растяжением в $\sqrt{2}$ раз. Возводя C в квадрат, получим $c^2 = (1 + i)^2 = 2i$. Это оператор поворота против часовой стрелки на 90° с последующим растяжением в два раза /см. чертеж/.

§ 9. Роль теории измерения величин и действительных чисел в геометрии.

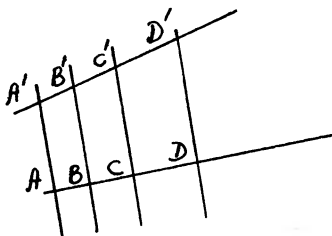
В курсе восьмилетней школы осталась не доказанной теорема, лежащая в основе теории подобия, а через нее и многих дальнейших разделов геометрии:

Соответствующие отрезки, отсекаемые пучком параллельных прямых на двух секущих, пропорциональны: если

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD',$$

то

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$$



/ср. Никитин, Геометрия, § 84/. Ее отчетливое доказательство в курсе восьмилетней школы было невозможно уже потому, что там не бы-

ло ясно сказано, что такое отношение двух величин. С устранением этого пробела и начнется наш курс-геометрии 9-го класса.

§ 10. Иррациональные числа, несоизмеримые величины.

Числа вида

$$a = \frac{m}{n},$$

где m целое неотрицательное и n натуральное, называются положительными рациональными числами. Легко доказать, что любое рациональное число выражается десятичной дробью, знаки которой начиная с некоторого места чередуются периодически. Например:

$$7/20 = 0,0\mathbf{101001001001}\dots = 0,01(01)$$

В арифметике этот факт был установлен для десятичного представления чисел.

Поэтому, число

$$1,01001000100001000001\dots$$

/после n -ой единицы n нулей/ не может быть рациональным. Не рациональные числа называются иррациональными.

Две величины /естественно, однородные, т.е. принадлежащие одной и той же системе величин со свойствами I-IV/ называются соизмеримыми, если их отношение рационально.

Естественно, что для соизмеримости a_1 и a_2 необходимо и достаточно существование величины e , которая содержится целое число раз как в a_1 , так и в a_2 :

$$a_1 = n_1 e, \quad a_2 = n_2 e.$$

Такая величина e называется общей мерой величин a_1 и a_2 .

Общая мера, если она существует /т.е. для соизмеримых a_1 и a_2 /может быть найдена при помощи алгоритма Эвклида: предполагая $a_1 \geq a_2$, ищем последовательно натуральные числа q_k , для которых

$$a_1 = q_2 a_2 + a_3, \quad a_3 < a_2,$$

$$a_2 = q_3 a_3 + a_4, \quad a_4 < a_3,$$

$$a_{k-1} = q_k a_k + a_{k+1}, \quad a_{k+1} < a_k$$

Теорема. Если алгоритм заканчивается на том, что

$$a_{k-1} = q_k a_k,$$

то величины a_1 и a_2 соизмеримы, величина a_k является их общей мерой и целым кратным любой другой общей меры a_1 и a_2 .

Если процесс продолжается неограниченно, то величины a_1 и a_2 несоизмеримы.

Доказательство. Если e есть общая мера a_1 и a_2 т.е.

$$a_1 = n_1 e, \quad a_2 = n_2 e,$$

то

$$a_3 = (n_1 - q_2 n_2) e,$$

т.е. остаток a_3 , подобно величинам a_1 и a_2 , является целым кратным от e . Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что при любом k

$$a_k = n_k e$$

Натуральные числа n_k идут убывая. Поэтому процесс

должен кончиться на том, что

$$a_{k-1} = q_k a_k = (q_k n_k) e = m e$$

Замечание. Так как q_k натуральные числа и $a_{k+1} < a_k$,

то

$$a_{k-1} \geq 2a_{k+1}$$

Поэтому

$$a_{2m} \leq \frac{a_1}{2^m}$$

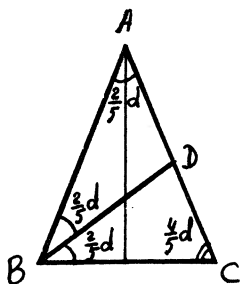
при достаточно большом m становится меньше любой наперед заданной положительной величины ϵ /это следствие аксиомы Архимеда/.

При помощи алгоритма Евклида математики древней греции получили первые доказательства существования несоизмеримых величин /с нашей же точки зрения - и иррациональных чисел!/
 ПРИМЕР. Рассмотрим правильный десятиугольник. Радиусы,

проведенные в две смежные вершины вместе с соединяющей их стороной образуют равнобедренный треугольник с углом $2/5 \pi$ при вершине. Откладываем на отрезке AC отрезок

$$AD = BC$$

Треугольник BDC подобен первоначальному. Поэтому алгоритм Евклида будет продолжаться неограниченно, причем неполные частные будут все время равны единице:



$$a_1 = AC = AD + DC = a_2 + a_3,$$

$$a_2 = BC = a_3 + a_4,$$

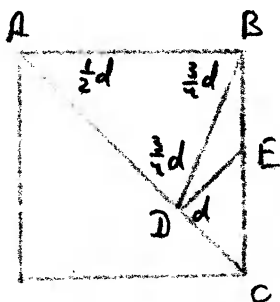
$$a_3 = a_4 + a_5,$$

$$a_4 = a_5 + a_6,$$

$$\dots$$

Аналогично доказывается, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной /см. чертеж/.

Поэтому отношение диагонали к стороне, т.е. число $\sqrt{2}$ иррационально.



Задача. Докажите чисто арифметически, что не существует дроби m/n , квадрат которой равен двум /воспользуйтесь теоремой § 4 о единственности разложения на простые множители/.

§ II. Скалярные величины.

Из курса восьмилетней школы вы знакомы с "направленными" величинами. Их свойства можно описать, изменив в § 5 формулировку свойств 6, 7 и 8. Формулировка свойства 10, введенного в § 7, останется прежней.

1. Если $a \in S$ и $b \in S$, то имеет место одно и только одно из соотношений

$$a < b, a = b, b < a.$$

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

3. Для любых $a \in S$ и $b \in S$ определена величина

$$c = a + b$$

которая тоже принадлежит S .

4. Всегда $a + b = b + a$.

5. Всегда $a + (b + c) = (a + b) + c$.

6. Если $a < a'$, то $a + b < a' + b$

7. Для любых a и b существует одна и только одна величина

$$c = a - b,$$

для которой

$$a = b + c.$$

8. Каковы бы ни были $a \in S$ и натуральное n , существует такое $b \in S$, что

$$a = nb.$$

из 3, 4, 5, 7 можно вывести, что при любых $a \in S$ и $b \in S$

$$a - a = b - b,$$

т.е. в системе величин S существует один вполне определенный элемент "нуль", обладающий тем свойством, что всегда

$$a + 0 = a$$

9. Если $b > 0$, то для любого $a \in S$ существует такое натуральное n , что

$$a < nb.$$

10. Если $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b$, то среди величин не меньших любой величины a_n существует наименьшая

$$a = \sup a_n.$$

Позднее мы узнаем, что все это можно высказать короче: скалярная система величин есть коммутативная группа /свойства 3, 4, 5, 7/ полностью упорядоченная /свойства 1, 2, 6/, с делением /свойство 8/, архимедовская /свойст-

во 9/ и удовлетворяющая аксиоме непрерывности 10.

Если S система величин, обладающая перечисленными здесь свойствами, то подсистема тех $a \in S$, для которых выполнено неравенство $a > 0$, обладает всеми свойствами системы положительных скалярных величин, описанными ранее. Мы не будем сейчас заниматься доказательством этого предложения.

§ 12. Действительные числа.

Разумно теперь несколько изменить определение монотонного оператора. Оператор

$$\beta = \beta a$$

преобразующий скалярные величины системы S в величины той же системы называется монотонным, если имеет место одно из двух:

$$\begin{array}{ll} \text{а/ из } a \leq a' & \text{вытекает } \beta a \leq \beta a' \\ \text{б/ из } a \leq a' & \text{вытекает } \beta a' \leq \beta a. \end{array}$$

Одно из этих свойств должно выполняться для всех пар величин $a \leq a'$ сразу.

Тогда по-прежнему действительным числом /теперь уже не непременно положительным!/ можно считать любой монотонный аддитивный оператор на системе скалярных величин. Нулевой оператор 0 отображает любую величину a в нуль /системы S - мы пользуемся одинаковыми обозначениями для нуля числовой системы и нуля системы S , что не ведет к неприятностям/:

$$0 \cdot a = 0.$$

Положительные числа являются операторами строго возрастающими: если $\beta > 0$, то из $a < a'$ вытекает $\beta a < \beta a'$.

Отрицательные числа $\beta < 0$ представляются в виде $\beta = -\alpha$,

где α положительно и являются операторами строго убывающими.

Среди действительных чисел выделяются:

а/ целые числа

$$0, 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, -3, \dots$$

б/ рациональные числа - представимые в виде

$$z = \frac{m}{n},$$

где n натуральное, а m целое.

Множество всех целых чисел будем обозначать $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел - $\mathbb{Q}$, множество всех действительных чисел - $\mathbb{D}$.

Для любого действительного числа x можно найти наибольшее целое число $z \leq x$. Это целое число называется целой частью числа x и обозначается

$$[x].$$

Действительное число x представляется в виде

$$x = \sup x_n, \\ x_n = [x] + \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2^2} + \dots + \frac{q_n}{2^n},$$

где

$$q_k = 0, \text{ или } 1.$$

Представление это однозначно определяется числом x ,

если требовать выполнения условия /в/ со стр. 12: среди чисел

q_n имеется бесконечное число нулей.

Примеры:

$$\left[-\frac{1}{3}\right] = -1, \quad -\frac{1}{3} = \bar{1},6666\dots \quad \text{в десятичной системе}$$

$$-\frac{1}{3} = \bar{1},101010\dots \quad \text{в двоичной системе.}$$

$$[-7] = -7, \quad -7 = \bar{7},00000\dots$$

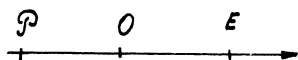
Дробная часть x :

$$x - [x] = \{x\}.$$

Примеры:

$$\{3\} = 0, \quad \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

§ 1. Координаты на прямой и на плоскости.

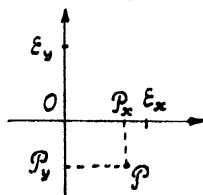


Зафиксировав на прямой точки O и E получаем взаимно однозначное соответствие

между точками прямой и действительными числами:

$$P \leftrightarrow x, \quad x = \frac{OP}{OE}$$

Выбрав на плоскости две перпендикулярные прямые и отложив от точки пересечения O два равных отрезка OE_x, OE_y ,



получаем взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел:

$$P \leftrightarrow (x, y), \quad x = \frac{OP_x}{OE_x}, \quad y = \frac{OP_y}{OE_y}$$

§ 2. Числовая прямая и числовая плоскость.

Теперь мы сделаем шаг, которого избегают в обычном школьном преподавании, но который логически законен и позволяет сформулировать многие математические факты значительно более кратко. Мы будем называть само множество действительных чисел числовой прямой, а множество упорядоченных пар действительных чисел числовой плоскостью.

В соответствии с этим каждое действительное число будет у нас точкой на числовой прямой, а упорядоченная пара действительных чисел — точкой на числовой плоскости.

Кроме того, мы будем считать, что геометрическая фигура

есть множество точек. Например, на числовой плоскости окружность радиуса единица с центром в начале координат есть множество пар (x, y) , для которых $x^2 + y^2 = 1$.

График функции

$$f(x) = x^3$$

для нас теперь будет просто множеством точек (числовой плоскости) вида (x, x^3) . На обычном школьном языке следовало бы говорить: график функции $f(x) = x^3$ есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y = x^3$$

Заметьте для дальнейшего формулы расстояния между двумя точками на числовой прямой

$$\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

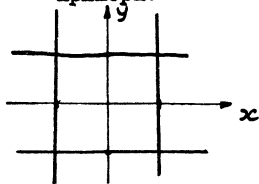
и на числовой плоскости

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

§ 8. Множество решений уравнения или неравенства.

С множествами всех решений уравнения или неравенства вам часто приходилось иметь дело. Если неизвестных одно или два, то эти множества изображаются в виде множеств, лежащих на прямой или на плоскости.

Примеры:



1. Множество решений уравнения

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$$

состоит из точек четырех прямых

$$x = 1, x = -1, y = 1, y = -1.$$

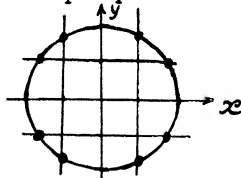
2. Множество всех решений уравнения

$$1 - |x| = |x - 1|$$

есть сегмент $[0, 1]$.

При решении системы уравнений или неравенств ищутся их общие решения. Иначе говоря, множество решений системы уравнений состоит из всех общих элементов множеств решений каждого уравнения в отдельности, или короче - является пересечением этих множеств (см. следующий параграф).

примеры:



3. Система

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

имеет восемь решений.

4. Множество решений системы

$$|x| < 1, |y| < 1$$

состоит из внутренних точек квадрата.

Задачи для решения после знакомства с функцией $\{x\}$

(см. глава 3):

Найти множества решений уравнений и систем

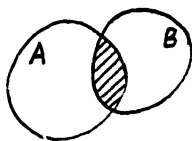
1. $\{x\} + \{y\} = 0$

2. $\{x\} = \{y\}$

3. $(\{x\} - \frac{1}{2})^2 + (\{y\} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{9}$

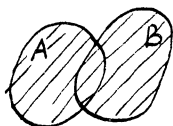
4. $|\{x\} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{10}, |\{y\} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{10}$

§ 4. Некоторые операции над множествами и отношения между множествами.



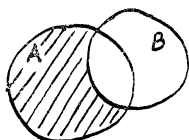
$A \cap B$ - множество всех тех x , которые принадлежат как множеству A , так и множеству B -- пересечение множеств.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$$

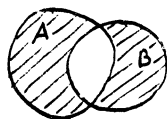


$A \cup B$ - множество всех тех x ,
которые входят в A или в B , или
в оба множества A и B - соединение
множеств A и B .

$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$
(не разделительное "или").



$A \ominus B$ - множество тех x , кото-
рые входят в A , но не входят в B .



$A \circ B$ - множество всех тех x ,
которые входят точно в одно из множеств
 A и B (в A "или" в B в
разделительном смысле).

Отношение включения:

$$A \subset B$$

каждый элемент множества A принадлежит множеству B :
 $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$.

$$A \cap B \subset A \cup B.$$

$$A \ominus B \subset A \circ B \subset A \cup B.$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \circ B) \cap (A \cap B) = \emptyset \quad (\emptyset - \text{пустое множество}).$$

ПРИМЕРЫ

	Уравнения	Множество решений
	$a(x, y) = 0$	A
	$b(x, y) = 0$	B
1.	$ab = 0$	$A \cup B$
2.	$a^2 + b^2 = 0$	$A \cap B$
3.	$\frac{a}{b} = 0$	$A \ominus B$
4.	$\frac{ab}{a^2 + b^2} = 0$	$A \circ B$

При проверке 3 и 4 заметьте, что дробь не определена при тех значениях неизвестных, при которых знаменатель обращается в нуль.

§ 5. Линейные неравенства и выпуклые множества.

Рассматривая неравенства

$$L(x, y) = Ax + By + C \geq 0$$

мы будем предполагать, что хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля. При этом ограничении имеет место

ТЕОРЕМА. Множество решений неравенства

$$Ax + By + C > 0$$

есть открытая полуплоскость, ограниченная прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Множество решений неравенства

$$Ax + By + C \geq 0$$

есть замкнутая полуплоскость, ограниченная той же прямой.

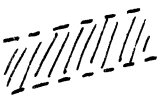
(Надо знать доказательство и определения "открытой полуплоскости" и "замкнутой полуплоскости". Естественно, что теорема верна и для неравенств вида < 0 и ≤ 0 .)

Система двух линейных неравенств с двумя неизвестными

$$L_1 > 0, L_2 > 0$$

$$L_1 \geq 0, L_2 \geq 0$$

может иметь в качестве множества решений:

- | | | | | |
|----|---|------------------|---|------------------|
| 1. |  | открытый угол |  | замкнутый угол |
| 2. |  | открытую полосу |  | замкнутую полосу |
| 3. | | пустое множество | | пустое множество |
| 4. | | | | прямую |

Рассмотрите

~~систему~~ все возможности, представляющиеся в случае ~~двух~~ линейных неравенств с двумя неизвестными. Запоминать здесь ничего не надо, но надо научиться находить множества решений для любой системы линейных неравенств с одним и двумя неизвестными. Например, для неравенств

а) $x > 0$

б) $y \geq 0$

в) $x + y < 1$

г) $x + y > 0$

д) $x + y \leq 0$

найдите решения систем

$(a, 0), (a, b, d), (a, 0, b)$

$(b, d), (a, b, d), (t, d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество на прямой или на плоскости (определение обобщается и на множества лежащие в трехмерном и в "э-мерном" пространстве, но пока мы этими случаями не занимаемся) называется выпуклым, если из того, что оно содержит две точки

A и B

вытекает, что оно содержит и все точки отрезка

AB

ТЕОРЕМА. Пересечение

$$V = \bigcap_{k=1}^n V_k$$

любого числа выпуклых множеств выпукло.

Доказательство надо знать.

можно считать известным (хотя в восьмилетней школе, да и вообще в школьном курсе геометрии обычно это не доказывают), что любая полуплоскость (открытая или замкнутая) есть выпуклое множество. В силу нашей теоремы пересечение любой системы полуплоскостей, т.е. множество решений любой системы линейных неравенств, является выпуклым множеством.

В частности, к выпуклым множествам принадлежат прямые, множества, состоящие из одной точки и пустое множество.

ДЛЯ ЖЕЛАЮЩИХ:

1. Теорема верна и для бесконечных систем выпуклых множеств.

2. Можно доказать, что любое выпуклое множество на плоскости есть пересечение некоторой системы полуплоскостей. Например, открытый круг есть пересечение всех открытых полуплоскостей, ограниченных его касательными и содержащих его центр.

3. Пересечение всех полуплоскостей, содержащих произвольное плоское множество M , называется "выпуклой оболочкой M ". Произведение всех замкнутых полуплоскостей, содержащих M называется "замкнутой выпуклой оболочкой" этого множества, оно состоит из всех точек плоскости, которые нельзя "отделить" от множества M при помощи прямой.

§ 6. Выпуклые множества на прямой.

На прямой существуют только такие типы выпуклых множеств:

1. Вся прямая.

2. Замкнутые полупрямые $\{x \mid a \leq x\}$

или $\{x \mid x \leq a\}$

3. Открытые полупрямые $\{x \mid a < x\}$ или $\{x \mid x < a\}$

4. Замкнутые отрезки (сегменты) $\{x \mid a \leq x \leq b\}, a < b$

5. Открытые отрезки (интервалы) $\{x \mid a < x < b\}, a < b$

6. Полузамкнутые отрезки $\{x \mid a \leq x < b\}, a < b$
или $\{x \mid a < x \leq b\}, a < b$

7. Множества из одной точки $x = a$

8. Пустое множество

Доказательство этого утверждения не совсем просто, так как оно может быть построено только на основе "аксиом непрерывности" (в нашем изложении — аксиомы 9 и 10). Если бы мы сочли за полную прямую множество точек с рациональными абсциссами, то множество $\{x \mid x^2 < 2\}$ нельзя было бы представить как интервал

$$\{x \mid a < x < b\}$$

так как "истинные" его "концы" имеют иррациональные абсциссы $-\sqrt{2}$ и $+\sqrt{2}$.

Обозначения

$$(-\infty, \infty)$$

$$[a, \infty), (-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a)$$

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

$$\{a\}, \emptyset.$$

§ 7. Предельные точки, замкнутые и связанные множества.

Различие между интервалами (a, b) и сегментом $[a, b]$ несколько деликатно, как и различие между замкнутым кругом^{x)}

$$\bar{K} = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

и открытым кругом

$$K = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$$

нельзя вырезать из бумаги две различные модели, из которых одна была бы моделью замкнутого круга, а другая — моделью открытого круга.

Тем не менее, такие различия важны для математика. Замкнутый круг как множество точек есть соединение открытого круга и ограничивающей его окружности:

$$\bar{K} = K \cup S$$

$$S = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

Физически различие между замкнутым кругом и открытым кругом, состоящим из его внутренних точек, неуловимо потому, что на практике мы можем различать лишь точки, находящиеся на не слишком малом расстоянии, а сколько угодно близко к точке P , лежащей на окружности S , имеются точки, лежащие в открытом круге K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка P называется предельной точкой множества M , если при любом $\varepsilon > 0$ существует точка $P' \in M$, $P' \neq P$, на расстоянии меньше ε от P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

^{x)} Мы обозначаем $\{ x \mid A(x) \}$ множество предметов x , обладающих свойством A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Соединение множества и множества его предельных точек называется замыканием множества M и обозначается $\bar{M}$.

Примеры: сегмент $[a, b]$ является замыканием интервала (a, b) , замкнутый круг K — замыканием открытого круга K .

ТЕОРЕМА. Замыкание $\bar{M}$ является наименьшим замкнутым множеством, содержащим M , т.е. а) $\bar{M}$ содержит M , б) если множество F замкнуто и содержит M , то F содержит $\bar{M}$. (Докажите!)

Существуют множества, которые распадаются на "не связанные друг с другом" части. Наоборот, сегмент, окружность, прямая, круг, любое выпуклое множество — "связны". Точное определение связности потребует от вас для сознательного усвоения некоторых усилий. Формально оно таково:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. множество M связано, если при любом его представлении в виде соединения не пустых множеств

$$A \cup B$$

либо A содержит предельную точку B , либо B содержит предельную точку A , т.е.

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \neq \emptyset$$

Докажите, что замкнутые множества связны тогда и только тогда, когда их нельзя представить в виде соединения двух не пересекающихся и не пустых множеств.

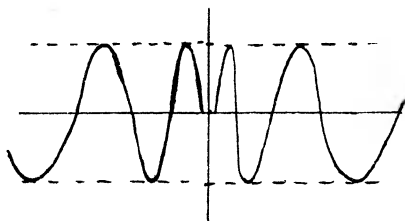
ТЕОРЕМА. Любое выпуклое множество связано.

Докажите сначала, что сегмент является связным множеством. После этого доказательство уже не трудно. Доказательство связности сегмента существенно опирается на предложение о существо-

вании у каждого ограниченного не пустого множества действительных чисел верхней грани (проведите это доказательство).

Для не замкнутых множеств понятие связности несколько менее наглядно. Например, график функции

$$y = \sin \frac{1}{x}$$



(она не^ле определена в точке $x=0$) не является связным, но при присоединении к этому графику точки 0 он делается связ-

ным. Вопрос: каково замыкание этого графика?

Заметьте еще для дальнейшего определения: множество точек прямой называется ограниченным, если оно помещается на сегменте; множество точек плоскости ограничено, если оно помещается в некотором круге.

Контрольные вопросы (очень легкие):

I. Приведите примеры на все комбинации свойств

связность — не связность

замкнутость — не замкнутость

ограниченность — неограниченность

(восемь примеров).

2. Какие из этих восьми случаев возможны для выпуклых множеств?

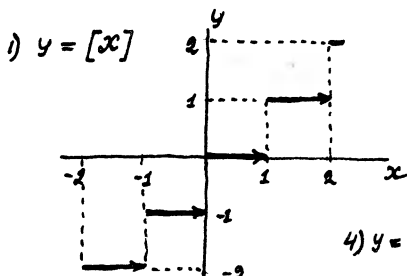
§1. Действительные функции действительного переменного, их графики.

Пусть каждому x из некоторого множества E действительных чисел поставлено в соответствие вполне определенное действительное число y . В такой обстановке говорят, что на множестве E **определена** функция

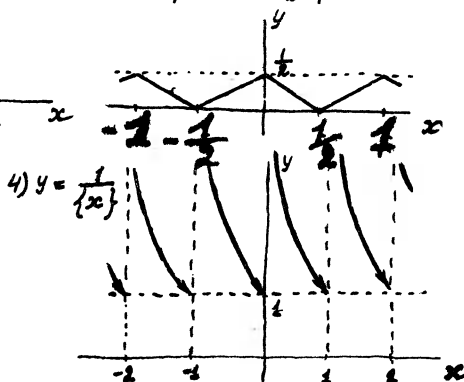
$$y = f(x)$$

Множество точек плоскости с координатами (x, y) , где $x \in E$, $y = f(x)$, называется графиком функции f . Множество E называется "областью определения" функции f .

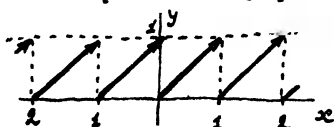
ПРИМЕРЫ. (В первых трех примерах функции определены всюду, т.е. область определения совпадает со всей числовой прямой. В четвертом примере область определения есть числовая прямая за вычетом целочисленных точек.)



3) $y = |\{x\} - \frac{1}{2}|$



2) $y = \{x\} = x - [x]$



§2. Вводные примеры к понятию непрерывности.

I. Пусть

$$y = 5x + 2$$

Спрашивается, с какой точностью надо знать x , чтобы определить y с точностью до 0,001? Легко видеть, что достаточно знать x с точностью до 0,0002.

Вообще, если

$$y = kx + b$$

то из

$$|x - x_0| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{k}$$

вытекает

$$|y - y_0| \leq \varepsilon.$$

2. Для функции

$$y = x^2$$

без дополнительных ограничений на допустимые значения x аналогичная задача не имеет решения. Сколь бы мало ни было $\delta > 0$, можно найти такие x и x_0 ,

$$|x - x_0| \leq \delta$$

что разность

$$y - y_0 = x^2 - x_0^2$$

будет сколь угодно велика.

3. Но, если заранее известно, что

$$|x| \leq a, |x_0| \leq a$$

то из

$$|x - x_0| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2a}$$

Вытекает

$$|y - y_0| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0| |x - x_0| \leq 2a\delta \leq \varepsilon$$

4. Пусть известно, что

$$|x| \leq 0,1 \quad |y| \leq 1000 \quad | \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b$$

Спрашивается, с какой точностью надо знать x и y , чтобы можно было определить произведение xy с точностью до

$$0,001 \quad | \quad \varepsilon$$

Возможный ответ таков: достаточно знать x с точностью до

$$\frac{0,001}{2 \cdot 1000} = 0,0000005 \quad | \quad \frac{\varepsilon}{2b}$$

и y с точностью до

$$\frac{0,001}{2 \cdot 0,1} = 0,005 \quad | \quad \frac{\varepsilon}{2a}$$

В самом деле, если

$$|x| \leq a, \quad |x_0| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |y_0| \leq b,$$

$$|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2b}, \quad |y - y_0| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$$

то

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y - y_0) + (x - x_0)y_0| \leq \\ &\leq |x||y - y_0| + |y_0||x - x_0| \leq a \cdot \frac{\varepsilon}{2a} + b \cdot \frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon. \end{aligned}$$

5. Пусть известно, что

$$|x| \geq a, \quad |x_0| \geq a,$$

при каком δ из

$$|x - x_0| \leq \delta$$

вытекает

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \leq \varepsilon.$$

Ответ: при

$$|x - x_0| \leq \varepsilon a^2$$

Задачи. (Задачи этого типа надо научиться решать в такой мере, чтобы в дальнейшем это никогда не представляло затруднений

К $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta > 0$ так, чтобы при указанных ограничениях из

$$|x - x_0| < \delta$$

вытекало

$$|y - y_0| < \varepsilon.$$

Дать ответ в общей форме (для любого $\varepsilon > 0$) и для $\varepsilon = 0,001$.

1. $y = 2|10x - 5|$

2. $y = |\{x\} - \frac{1}{2}|$

3. $y = +\sqrt{x}$ при неизбежном ограничении, что

x_0 и x принадлежит области определения функции $y = +\sqrt{x}$, т.е. полупрямой $(0, \infty)$

4. $y = 10x^2$

при ограничении

a) $x, x_0 \in [-100, 100]$,

b) $x, x_0 \in [-c, c]$

при ограничении

5. $y = \frac{100}{x}$

а) $x, x_0 \in (-0,1, +0,1)$

б) $x, x_0 \in (-h, +h)$

6. Показать, что задача 5 была бы неразрешима, если в ней снять ограничение на значения x и x_0 и рассматривать любые x и x_0 , из области определения функции, т.е. любые x и x_0 , отличные от нуля.

§3. Непрерывность функции одного переменного в точке.

Примеры §2 показывают, что во многих случаях значение функции изменяется на величину, меньшую сколь угодно малого заданного $\varepsilon > 0$, если значения аргументов меняются "достаточно мало" — меньше, чем на некоторое $\delta > 0$, выбранное к заданному ε . Это наблюдение служит основанием для введения различных определений "непрерывности" функций. Сейчас мы займемся простейшим из этих понятий: понятием непрерывности функции одного переменного

$$y = f(x)$$

в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция f определена на множестве M содержащем точку x_0 . Функция f называется непрерывной в точке x_0 , если для любого положительного ε существует положительное δ , что и в

$$x \in M, |x - x_0| \leq \delta$$

вытекает

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Примеры.

1) При любом x_0 функция $f(x) = x^2$ непрерывна в x_0 .

/ Можно положить $\delta = \min(1, \varepsilon / (1 + 2|x_0|))$

2) При любом $x_0 \neq 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в x_0 .

/ Можно положить $\delta = \min(\frac{1}{2} \varepsilon x_0^2, \frac{1}{2} |x_0|)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция определенная и непрерывная в каждой точке множества M называется непрерывной на M .

Понятие непрерывности в точке x_0 по существу интересно лишь в случае, когда x_0 есть предельная точка области определения функции, т.е. когда в любом интервале

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(при любом положительном δ) имеются точки области определения функции $f(x)$ отличные от x_0 .

Легко видеть, что любая функция непрерывна в любой изолированной точке своей области определения. Такая "теорема", конечно, не очень интересна, но признать ее за истинную необходимо, так как иначе можно получить противоречие. Например, функции

$$f(x) = +\sqrt{x}, \quad g(x) = +\sqrt{-x}$$

непрерывны в точке $x = 0$, первая из них определена только при $x \geq 0$, вторая только при $x \leq 0$. Их сумма

$$h(x) = +\sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

определена только в точке $x=0$ и непрерывна в этой точке.

§4. Равномерная непрерывность.

Пусть требуется составить таблицу, при помощи которой по t , лежащему в пределах $0 \leq t \leq 3$

можно находить без всяких вспомогательных вычислений

$$s = s(t) = \frac{9,81 t^2}{2}$$

с ошибкой не более 0,1.

Поставим задачу в общем виде. Пределы изменения t даны неравенствами

$$0 \leq t \leq a$$

s задано формулой

$$s = s(t) = \frac{g t^2}{2},$$

требуется находить с ошибкой меньшей чем ε . Если

$$|\Delta t| = |t_2 - t_1| < \delta$$

то

$$\begin{aligned} |\Delta s| &= \left| \frac{g t_2^2}{2} - \frac{g t_1^2}{2} \right| = \frac{g}{2} |t_2^2 - t_1^2| = \\ &= \frac{g}{2} |t_2 + t_1| |\Delta t| < g a \delta \end{aligned}$$

Выбирая

$$\delta = \frac{\varepsilon}{g a}$$

получим, что при

$$|\Delta t| < \delta$$

и t_1 и t_2 лежащих в указанных выше пределах

$$|\Delta s| < \varepsilon$$

Если составить таблицу с "шагом" $h = \frac{a}{n} < 2\delta$, т.е. таблицу значений

$$s_0 = s(0), s_1 = s(h), \dots, s_n = s(nh) = s(a),$$

то подбирая к t , лежащему в указанных пределах, ближайшее значение $t_k = kh$, имеющееся в таблице, получим

$$|s(t) - s(t_k)| < \varepsilon.$$

В нашем примере следует выбрать

$$h < \frac{0,1}{9,81 \cdot 5}$$

Удобно взять

$$h = 0,002.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция

$$y = f(x)$$

называется равномерно непрерывной на множестве M , если для любого положительного ε существует такое положительное δ , что из

$$x_1 \in M, x_2 \in M, |x_2 - x_1| < \delta$$

вытекает

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Замечание. В определении предполагается, что M есть подмножество области определения функции.

Задача. Показать, что функция

$$y = \frac{1}{x}$$

равномерно непрерывна на любом множестве M , которое не имеет общих точек с интервалом

$$(-h, h)$$

(каково бы ни было положительное и раз на всегда фиксированное h).

Показать, что наша функция во всей своей области определения уже не будет равномерно непрерывной.

§5. Некоторые теоремы о непрерывных функциях.

Понятие равномерной непрерывности почему-то считается "трудным". Мы им займемся обстоятельно несколько позднее. Пока нам нужнее понятие непрерывности в точке

Докажите:

1) Константы

$$f(x) = c$$

(как функции x) непрерывны в любой точке x_0 .

2) Непрерывность в любой точке функции

$$f(x) = x$$

3) Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке непрерывна и их сумма

$$f(x) + g(x)$$

4) Аналогичное утверждение для произведения двух функций.

Из 1) - 4) легко выводится непрерывность любого многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

5) Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 непрерывно и частное

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

В учебниках анализа доказывают еще одну важную теорему:

Теорема А. Если функция непрерывна в каждой точке сегмента $[a, b]$, то множество всех значений, которые она принимает на этом сегменте, есть некоторый сегмент $[c, d]$, или одна единственная точка.

Это значит, что в каких-то точках x_1 и x_2 наша функция принимает свое наименьшее значение $c = f(x_1)$ и наибольшее значение $d = f(x_2)$ и что в остальных точках сегмен-

та она хотя бы по разу принимает промежуточное значение y ,

$$c < y < d.$$

Теорема эта является следствием значительно более

общих двух теорем, применимых к любой функции, непрерывной в каждой точке множества M на прямой, плоскости, или в

n -мерном пространстве:

I. Если множество M ограничено и замкнуто, то множество $f(M)$ всех значений, которые непрерывная на M функция f принимает на M , ограничено и замкнуто.

II. Если множество M связно, то множество $f(M)$ для непрерывной на M функции f тоже связно.

Вы без большого труда выведете теорему A из теорем I и II. Доказательство теорем I и II несколько труднее. Попробуйте все-таки, провести его самостоятельно.

Верна такая замечательная теорема:

Теорема В. Если функция непрерывна в каждой точке сегмента $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.

Теорема эта тоже является следствием такой более общей применимой к функциям, определенным на множествах, лежащих на прямой, на плоскости, или в n -мерном пространстве:

III. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она и равномерно непрерывна на этом множестве.

§6. Примеры разрывных функций.

I) Функция

$$f_1(x) = [x]$$

Разрывна (не непрерывна) в целочисленных точках и непрерывна во всех остальных.

2) Функция Дирихле

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{для рациональных } x \\ 0 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

разрывна в любой точке.

3) Функция

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{в рациональной точке } \pm \frac{m}{n}, \text{ где} \\ & \text{дробь } \frac{m}{n} \text{ несократима,} \\ 0 & \text{в иррациональной точке } x \end{cases}$$

разрывна в любой рациональной точке и непрерывна в любой иррациональной точке.

§ 7. Предел функции при $x \rightarrow a$.

Если функция $f(x)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки a кроме самой этой точки, то возникает вопрос о том, можно ли дополнить ее определение, приписав ей в точке a такое значение $f(a) = c$, при котором она окажется непрерывной.

Оказывается, что в тех случаях, когда это возможно, решение задачи единственно. Это единственное число c называется пределом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Пример. ▮ Функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

не определена при $x = 0$, но

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Поэтому, функция

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$. Мы сейчас строго различаем фун-

цию f_1 от функции f (у них разные области определения).
Математикам более ранних времен казалось, что сама функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

"естественным образом" принимает в точке $x=0$ значение 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число b называется пределом функции $f(x)$,
при x стремящемся к a и обозначается $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
если

а) функция $f(x)$ определена во всех точках x некоторой
окрестности точки a кроме, может быть, самой этой точки,

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из

$$|x - a| < \delta$$

вытекает

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Предел у функции в данной точке может быть только один.

Докажите это утверждение и следующую теорему:

Теорема. Если функция $f(x)$ определена во всех точках
некоторой окрестности точки a , то для ее непрерывности
в точке a необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке
имела ~~предел~~ предел и соблюдалось равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Из этой теоремы и других предшествующих теорем легко
вывести такие следствия:

1) Если в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$,
равна постоянному c , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2) Если в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$
равна x , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$.

3) Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

4) Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Можно доказать эти следствия и в качестве самостоятельных теорем непосредственно на основе определения предела.

Задача. Докажите, что предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ для функции примера 3 из §6 существует при любом a и найдите его.

Задача. Найдите точки непрерывности и точки разрывности функций из §1 (не забудьте, что вопрос о том, является ли для функции $f(x)$ точка x_0 точкой непрерывности, или точкой разрывности, ставится только для тех точек x_0 , в которых функция определена).

§8. Непрерывность в точке справа и слева.

Оказывается полезным ввести понятия "непрерывности справа" и "непрерывности слева". Причем, эти понятия определяются здесь только для функций, ~~определенных~~ определенных всюду в правой и, соответственно, левой полукрестностях. Более общие определения вы без труда сможете ~~или~~ сформулировать сами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке a , если она при некотором $h > 0$ определена во всех точках x

$$a \leq x \leq a + h$$

и если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из

$$a \leq x \leq a + \delta$$

вытекает

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Вполне аналогично определение непрерывности слева.

Пример. Функции

$$f(x) = [x], g(x) = \{x\}$$

в целочисленных точках непрерывны справа, но не непрерывны слева.

Если для функции $f(x)$ определенной при

$$a < x < a+h, h > 0$$

"естественное значение"

$$f(a) = c$$

существует, то возникает понятие "предела справа":

для функции $f(x)$, определенной при некотором $h > 0$

для всех x из интервала

$$a < x < a+h$$

число c называется ее пределом справа в точке a ,

$$c = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из

$$a < x \leq a+\delta$$

вытекает

$$|f(x) - c| \leq \varepsilon.$$

Аналогично определяется предел слева.

Теорема. Если функция $f(x)$ определена во всех точках ~~или~~ некоторой окрестности точки a , то для того, чтобы функция была непрерывна в точке a , необходимо и достаточно, чтобы у нее существовали пределы справа и слева в точке a и выполнялись равенства $f(a+) = f(a-) = f(a)$.

Для примера проведения других аналогичных доказательств проведем доказательство достаточности условия подробно.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, из определений предела справа и

предела слева вытекает существование таких $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$,
что из

$$a < x \leq a + \delta_1,$$

вытекает

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f(a+)| \leq \varepsilon,$$

а из

$$a - \delta_2 \leq x < a$$

вытекает

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f(a-)| \leq \varepsilon.$$

Положив

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

получим, что из

$$|x - a| \leq \delta \quad (1)$$

вытекает

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad (2)$$

(в случае $x = a$ разность $f(x) - f(a)$ равна нулю).

Существование же для любого $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$, что
из (1) вытекает неравенство (2) и обозначает по определению непрерывность в точке a .

Примеры.

1) Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$ в целочисленных точках имеют разные пределы слева и справа.

2) Функция $y = \frac{1}{\{x\}}$ в целочисленных точках имеет предел слева и не имеет предела справа.

§9. Заключительные замечания.

Элементарными функциями называются функции, которые можно записать при помощи формулы, содержащей лишь константы, знак независимой переменной, знаки возведения в степень,

логарифма, тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Таковы

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = x^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\lg x}$$

и т.п..

Можно доказать, что элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Тем не менее, простейшие разрывные функции часто встречаются в практических задачах. Но в практических задачах это обычно лишь кусочно-непрерывные функции, т.е. функции, у которых в любом отрезке помещается лишь конечное число точек разрыва и в каждой точке разрыва имеется предел слева и предел справа. Функции типа "функции Дирихле" (пример в §6) математики ввели из чисто логических соображений: чтобы выяснить объем самого понятия "функция".

§1. Вводные примеры к понятию производной.

Понятие производной возникло в виде математического обобщения понятия скорости. Здесь мы обратим внимание на чисто математическую сторону дела. Непрерывные функции меняются "постепенно", т.е. малым приращениям независимого переменного соответствуют малые приращения функции. Наиболее важные в приложениях функции не только непрерывны, но обладают известной "плавностью" изменения.

Если вблизи какой-либо точки x_0 выбрать две точки x_1 и x_2 и рассматривать приращения функции

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

то они будут приблизительно пропорциональны приращениям независимого переменного

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Например:

θ	$\sin \theta$	Δ
$18^\circ 20'$	0,31454	0,00028
$18^\circ 21'$	0,31482	
$18^\circ 22'$	0,31510	
$18^\circ 23'$	0,31537	

θ	$\sin \theta$	Δ
$18^\circ 10'$	0,31178	0,00276
$18^\circ 20'$	0,31454	
$18^\circ 30'$	0,31730	0,00276
$18^\circ 40'$	0,32006	
$18^\circ 50'$	0,32282	0,00276
$19^\circ 00'$	0,32557	

Мы видим, что в десять раз большим приращениям аргумента соответствуют в десять раз большие приращения функции.

Если бы мы занялись значениями синуса для углов близких к 34° , то картина получилась бы аналогичная, но коэффициент в приближенном равенстве

$$\Delta \sin \theta = k \Delta \theta \quad (\text{углы в минутах})$$

оказался бы другим (вблизи $18^\circ - 19^\circ$ это приблизительно 0,00028 - 0,00027, а вблизи $34^\circ - 35^\circ$ приблизительно 0,00024).

θ	$\sin \theta$	Δ
$34^\circ 40'$	0,56880	0,00024
$34^\circ 41'$	0,56904	
$34^\circ 42'$	0,56928	

θ	$\sin \theta$	Δ
$34^\circ 40'$	0,56880	0,00239
$34^\circ 50'$	0,57119	
$35^\circ 00'$	0,57358	0,00239

Рассмотрим еще пример, который легче просчитать в общем виде. Пусть

$$f(x) = x^3$$

Здесь

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2$$

Если обе точки x_1 и $x_2 \neq x_1$, близки к x_0 , то

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \approx 3x_0^2$$

Значит для любых x_1 и $x_2 \neq x_1$, близких к x_0 приближенно

$$\Delta f \approx 3x_0^2 \Delta x$$

Число

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

и называется производной функции $f(x) = x^3$ в точке x_0 .

Таким образом, грубо говоря, производная

$$f'(x)$$

это множитель в приближенном равенстве

$$\Delta f \approx k \Delta x$$

которое делается все более точным при уменьшении прира-

щения независимого переменного Δx .

§2. Определение производной.

Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Аналогично определяется правая производная

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a)$$

и левая производная

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a).$$

Примеры.

1) Функция $f(x) = |x|$

в точке $x=0$ имеет левую производную

$$f'_-(0) = -1$$

и правую производную

$$f'_+(0) = +1$$

2) Функция $f(x) = \{x\}$

имеет в целочисленной точке правую производную

$$f'_+(n) = 1,$$

но не имеет левой производной.

Если функция определена в окрестности точки a , то для существования у нее производной в обычном смысле необходимо и достаточно, чтобы у нее существовали правая и левая производные и чтобы они были равны. Тогда

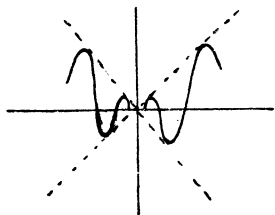
$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a).$$

§3. Гладкие функции.

Отсылая учащихся к учебникам анализа, ограничимся здесь некоторыми общими замечаниями. Если функция $f(x)$ имеет при $x = a$ производную, то это значит, что ее график имеет в точке $(a, f(a))$ касательную, уравнение которой имеет вид

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Таким образом, производная $f'(a)$ равна угловому коэффициенту касательной, т.е. характеризует направление графика в точке $(a, f(a))$. Если функция $f(x)$ в точке $x = a$ не имеет производной, то ее график в точке $(a, f(a))$ не имеет одного определенного направления. В простейшем случае графика функ-



ции $y = |x|$ в точке $(0,0)$ направление графика внезапно (скачком) меняется. В более хитроумном случае функции

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

график функции при приближении

к точке $(0,0)$ извивается, все чаще меняя направление.

Поэтому функцию, имеющую в точке производную, называют гладкой в этой точке. Интересно и еще понятие равномерно гладкой функции.

Функция $f(x)$ называется равномерно гладкой на множестве M , если существует определенная на M функция $f'(x)$, обладающая тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из

$$|x_1 - x_0| < \delta, |x_2 - x_0| < \delta, x_2 \neq x_1, x_0 \in M, x_1 \in M, x_2 \in M$$

вытекает

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| < \varepsilon. \quad 55$$

Понятие равномерно гладкой функции очень полезно, но на подобно понятию равномерно непрерывной функции тоже считается несколько трудным.

§4. Примеры не гладких непрерывных функций.

1. Функция

$$f(x) = |x|$$

гладкая отдельно на положительной полуоси $x \geq 0$ и отдельно на отрицательной полуоси $x \leq 0$, но не гладкая на всей прямой, или на отрезке $(-1, +1)$.

2. Функция

$$y = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ при } x \neq 0, \quad y = 0 \text{ при } x = 0,$$

гладкая при $x \neq 0$, но не равномерно гладкая в окрестности этой точки.

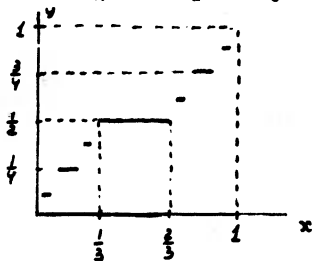
3. Функция Кантора, определенная для $0 \leq x \leq 1$ заданного в троичной системе счисления

$$x = 0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

тем, что в двоичной системе счисления

$$y = f(x) = 0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots,$$

где $y_n = 0$ при $x_n = 0$ и $y_n = 1$ при $x_n = 1, x_n = 2$,



если все $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ равны 0, или 2, и $y_n = 0$, если среди $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ встречаются равные 1.

4. Функция Ван-дер-Вардена

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(4^n x), \quad \varphi(x) = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$$

— 0 —

Цена 8 коп.